

## אנליזת פורייה

### פרק 5 - דיסטריבוציות

#### תוכן העניינים

1. מבוא .....	(לא ספר)
2. נגזרת דיסטריבוטיבית.....	1
3. גבולות דיסטריבוטיביים.....	2
4. טור פורייה של דיסטריבוציה .....	(לא ספר)
5. התמרת פורייה של דיסטריבוציה .....	(לא ספר)

## נזרת דיסטריבוטיבית:

**שאלות:**

$$\text{1) מצאו } f'(x) \text{ בМОון הדיסטריבוטיבי כאשר } f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x^2 + 2x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{2) מצאו } f''(x) \text{ בМОון הדיסטריבוטיבי כאשר } f(x) = e^{-|x|}$$

$$\text{3) מצאו } f'''(x) \text{ בМОון הדיסטריבוטיבי כאשר } f(x) = |x| \sin(x)$$

$$\text{4) תהיו } h(x) \in C^\infty(-\infty, \infty) \text{ (פונקציה גזירה אינסוף פעמים) ותהיו } L \text{ דיסטריבוציה.}  
הוכחו כי 'hL' = h'L + hL' \text{ (כאשר הנגזרות הן בМОון הדיסטריבוטיבי).}$$

$$\text{5) הוכחו כי } (1+x-e^x)\delta'''(x) = \delta(x) - 3\delta'(x)$$

6) יהיו  $j, k \in \mathbb{N}$ . הראו כי:

$$x^j \cdot \delta^{(k)}(x) = 0 \text{ א. אם } j > k \text{ ו. אם } j \leq k$$

$$x^j \cdot \delta^{(k)}(x) = \frac{(-1)^j}{k!(j-k)!} \delta^{(k-j)}(x)$$

$$\text{רמז: תוכלו להיעזר בנוסחת ליבנץ לגזירה } [f(x) \cdot g(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

## תשובות סופיות:

$$f'(x) = 2\delta(x-1) - 4\delta(x-2) + h(x) \quad \text{1}$$

$$f^{(2)} = -2\delta(x) + e^{-|x|} \quad \text{2}$$

$$f^{(2)} = \begin{cases} -[2\cos(x) - x\sin(x)] & x < 0 \\ 2\cos(x) - x\sin(x) & x > 0 \end{cases} \quad \text{3}$$

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. הוכחה. ב. הוכחה.

## גבולות דיסטריבוטיביים:

שאלות:

1) חשבו את הגבול הבא בМОNON הדיסטריבוטיבי .  

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h}$$

2) חשבו את הגבול הבא בМОNON הדיסטריבוטיבי .  

$$f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}$$

3) חשבו את הגבול הבא בМОNON הדיסטריבוטיבי .  

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$$

4) נתונה סדרת פונקציות .  

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- .א. בדקו האם הסדרה מתכנסת נקודתית על הישר ממשי.
- .ב. בדקו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה על הישר ממשי.
- .ג. בדקו האם הסדרה מתכנסת בМОNON הדיסטריבוטיבי.

5) תהי סדרת דיסטריבוציות במרחב 'D'.  

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-x^n & |x| < 1 \\ \frac{1}{n} & |x| \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו את הגבול הדיסטריבוטיבי .  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

ב. מצאו את הגבול הדיסטריבוטיבי (').  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

6) ענו על השעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי אם  $\hat{\varphi}(x) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^n \varphi(\omega)$  פונקציית מבחן אזי  $\hat{\varphi}(0) = 0$  לכל  $n$  טבעי.

ב. יהי  $N$  טבעי קבוע. הוכיחו כי הגבול של  $f_k(x) = k^N \sin(kx)$  בМОNON הדיסטריבוטיבי הינו 0.

**תשובות סופיות:**

$$\delta'(x) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} e^{-n|x|} = \delta(x) \quad (2)$$

$$\left| \int_a^b \sin(\lambda x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx \equiv M \quad (3)$$

. א. יהיו  $x$  שריםותי. אם  $x \leq 0$  אז  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  **(4)**

. אם  $x > 0$  אז החל מ-  $n$  גדול מספיק מתקיים  $\frac{2}{n} < x$  **(5)**

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{ב.}$$

$$\langle f_n(x), \varphi(x) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \quad \text{ג.}$$

$$\delta(x+1) - \delta(x-1) \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{א.} \quad (5)$$

ב. הוכחה.

א. הוכחה. **(6)**